Formalismes de la Polarisation EM

1 Description de la polarisation

Le champ électrique est toujours contenu dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Ce plan contient aussi le champ magnétique, lequel est toujours perpendiculaire au champ électrique. On peut écrire le champ électrique d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E_0}(\vec{r})e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

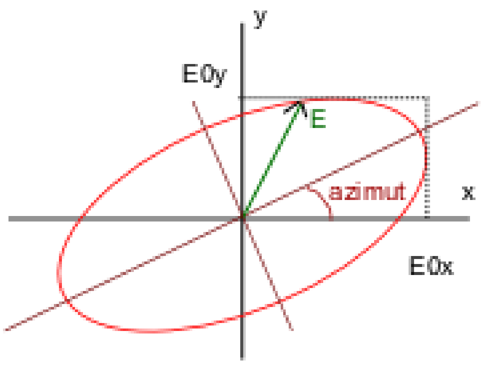
où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde et ω la fréquence de l'onde. $\vec{E_0}(\vec{r})$ est un vecteur à 2 dimensions contenu dans ce plan et que l'on peut décomposer dans une base orthonormale adéquate. :

$$\vec{E_0}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_x(\vec{r})e^{i\phi_x} \\ A_y(\vec{r})e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r})e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r}) \\ E_y(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

où on a représenté les amplitudes de deux composantes par A_x et A_y. On introduit une déphasage $\phi = \phi_y - \phi_x$ entre les 2 composantes : c'est elle qui est à l'origine de la polarisation. Si on considère la partie réelle de $\vec{E}$ on obtient deux équations. En multipliant ces équations par $\sin\phi$, en élevant au carré et en sommant, on obtient l'équation décrivant le mouvement du vecteur champ électrique dans le plan perpendiculaire :

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{E_x}{A_x}\frac{E_y}{A_y}\cos\phi = \sin^2\phi$$

Cette équation décrit de façon générale une ellipse. L'extrémité du vecteur champ électrique d'une onde monochromatique décrit cette ellipse. En particulier, si $\phi = 0$ ou π, l'équation décrit une droite : polarisation linéaire (rectiligne) selon une direction. Si $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $3\frac{\pi}{2}$, la polarisation devient circulaire droite ou gauche.



2 Formalisme de Jones

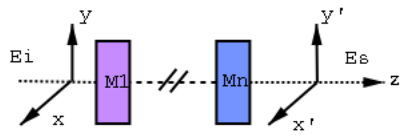
Vecteur de Jones Le formalisme de vecteurs de Jones un moyen de description de l'état de polarisation des ondes planes polarisées. Dans cette représentation, l'onde est décrite en termes complexes. On définit le vecteur de Jones avec $\phi = \phi_y - \phi_x$:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

L'intensité lumineuse :

$$I = \vec{J}^\dagger \cdot \vec{J}$$

Matrice de Jones Soit un système optique composé de N éléments. La polarisation de l'onde à l'entrée est notée $\vec{E_i}$ et à la sortie $\vec{E_s}$:



Le vecteur de Jones du champs en sortie sera :

$$\vec{E_s} = \mathbf{M}_N \ldots \mathbf{M}_1 \cdot \vec{E_i}$$

3 Formalisme de la matrice de cohérence

Le formalisme de Jones ne permet pas de traiter les ondes partiellement polarisées. La matrice de cohérence (ou de polarisation) permet d'associer la dimension énergétique à l'expression de la corrélation entre les composants E_x et E_y du vecteur de Jones. Elle est définie comme la moyenne temporelle du produit tensoriel d'un vecteur de Jones par son transposé conjugué :

$$\mathbf{J} = \langle \vec{E} \otimes \vec{E}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{xy}^* & J_{yy} \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{J}$ est *hermitique* ($J_{yx} = J_{xy}^*$). Sa trace définit l'intensité mesurable I :

$$I = Tr(\mathbf{J}) = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle$$

Lorsque l'onde n'est pas polarisée (*dépolarisée*) – comme la lumière naturelle –, il n'y a pas de corrélation entre les composantes du champs. L'intensité de chacune des composantes est identique dans n'importe quelle direction perpendiculaire à la direction de propagation. On a une matrice diagonale $J_{xy} = J_{yx} = 0$ et $J_{xx} = J_{yy}$.

Lorsque la lumière est complétement polarisée, $\det \mathbf{J} = 0$.

D'une manière générale, n'importe quelle onde quasi-monochromatique peut être décomposée comme la somme de deux ondex indépendantes : l'une onde complétement polarisée et l'autre complétement dépolarisée :

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J}_p) + (\mathbf{J}_d) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F & H \\ H^* & G \end{pmatrix}$$

Lien avec le formalisme de Jones Soient $\vec{E_i}$ et $\vec{E_s}$ les vecteurs de Jones des ondes incidentes er émergentes d'une matrice de Jones $\mathbf{N}$. Alors la matrice de cohérence **C'** associée au faisceau émergeant s'écrit :

$$\mathbf{C'} = \langle \vec{E_s} \otimes \vec{E_s}^\dagger \rangle = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^\dagger$$

avec $\mathbf{C} = \langle \vec{E_i} \otimes \vec{E_i}^\dagger \rangle$.

4 Formalisme de Stokes-Mueller

Vecteur de Stokes Ce formalisme utilise directement des grandeurs mesurables. Le vecteur de Stokes est :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_y E_x^* \rangle \\ i\left[\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_y E_x^* \rangle\right] \end{pmatrix}$$

S_0 Intensité totale ;

S_1 Différence entre l'intensité transmise par un polariseur linéaire orienté selon l'axe x (horizontal) et un autre orienté selon l'axe y (vertical) ;

S_2 Différence entre l'intensité transmise par un polariseur linéaire à 45° de l'axe x et un autre orienté à 135° de x ;

S_3 Différence entre l'intensité transmise par un polariseur circulaire droit et un polariseur circulaire gauche.

Si l'onde est polarisée, avec $\phi = \phi_y - \phi_x$:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_{0x}^2 \rangle + \langle E_{0y}^2 \rangle \\ \langle E_{0x}^2 \rangle - \langle E_{0y}^2 \rangle \\ \langle 2E_{0x}E_{0y}\cos\phi \rangle \\ \langle 2E_{0x}E_{0y}\sin\phi \rangle \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, on a $S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ avec égalité lorsque l'onde est complétement polarisée. Lorsque la lumière n'est pas polarisée, $S_1 = S_2 = S_3 = 0$. La décomposition d'une onde en une somme de deux ondes, l'une polarisée l'autre non est toujours valable : *Onde PP = Onde CD + Onde CP* :

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$$

Degré de polarisation

$$0 < \ P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \ < 1$$

$P = 1$: l'onde est complétement polarisée.

Matrice de Mueller Il existe une relation linéaire entre les vecteurs de Stokes d'entrée $\vec{S_i}$ et de sortie $\vec{S_s}$ d'un système optique : $\vec{S_s} = \mathbf{M} \cdot \vec{S_i}$ où $\mathbf{M}$ est une matrice 4×4.

Lien avec le formalisme de Jones À partir de la connaissance d'une matrice de Jones, on peut construire une matrice de Mueller par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

La matrice $\mathbf{A}$ étant définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & +i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{\dagger}$$

5 Changement de base

On rotation de α de la base (x, y) à la base (u, v) :

$$\mathbf{M}^{(x,y)} = \mathbf{R}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{M}^{(u,v)} \cdot \mathbf{R}(\alpha)$$

avec la matrice de rotation $\mathbf{R}(2 \times 2)$:

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

sachant que

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)$$

La matrice de rotation 4×4 :

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

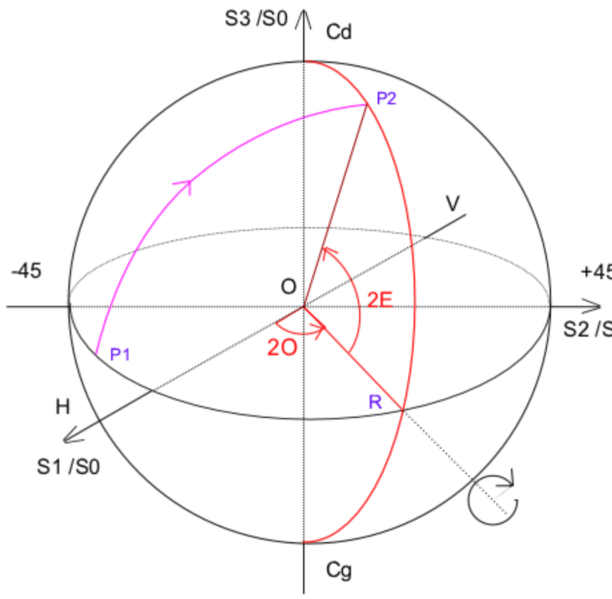
6 La sphère de Poincaré

Si on normalise le vecteur de Stokes :

$$\vec{S_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\epsilon \cos 2\theta \\ \cos 2\epsilon \sin 2\theta \\ \sin 2\epsilon \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est complétement caractérisé par 3 paramètres indépendants, l'*ellipticité* $\epsilon = \frac{1}{2}\arcsin\frac{S_3}{S_0}$ et l'*azimut* $\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{S_2}{S_1}$. Tout vecteur de Stokes peut donc être représenté par un point sur une sphère unité.

Chaque point sur la sphère représente une unique forme de polarisation. Le sens de la polarisation est définit par le signe de ϵ ($\epsilon < 0$, hémisphère sud : à gauche).



Pour déterminer l'effet d'un retardateur représenté par le point R sur une onde polarisée représentée par le point P_1, on applique une rotation à la sphère d'axe $O - R$ et d'angle ϕ égal au retard induit par la lame. La position finale P_2 correspond à la forme de polarisation à la sortie du retardateur.

1. Placer le point P_1 sur la sphère, correspondant à la forme initiale de la polarisation
2. Placer le point R correspondant au retardateur. θ représente l'orientation de l'axe rapide.
3. Appliquer une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (en obeservant la sphère) d'axe $O - R$ et d'angle égal à celui induit par le retardateur.
4. P_2

7 États de polarisation des champs

État de polarisation	Représentation temporelle	Vecteur de Jones $\vec{J}$	Vecteur de Stokes $\vec{S}$
Rectiligne Ox	$\begin{cases} E_x(t) = E_{0x}\cos\omega t \\ E_y(t) = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Rectiligne Oy	$\begin{cases} E_x(t) = 0 \\ E_y(t) = E_{0y}\cos\omega t \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Rectiligne ± 45°	$\begin{cases} E_x(t) = E_0\cos\omega t \\ E_y(t) = E_0\cos\omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Circulaire Droite	$\begin{cases} E_x(t) = E_0\cos\omega t \\ E_y(t) = -E_0\sin\omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Circulaire gauche	$\begin{cases} E_x(t) = E_0\cos\omega t \\ E_y(t) = E_0\sin\omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
Elliptique	$\begin{cases} E_x(t) = E_0\cos\omega t \\ E_y(t) = E_0\cos(\omega t - \phi) \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\nu \\ \sin\nu e^{i\phi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\epsilon\cos 2\theta \\ \cos 2\epsilon\sin 2\theta \\ \sin 2\epsilon \end{pmatrix}$
Non polarisé			$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8 Matrices d'éléments optiques classiques

Élements optique	Matrice de Jones $\mathbf{N}$	Matrice de Mueller $\mathbf{M}$
Polariseur		
horizontal ($\vec{x}$)	$\mathbf{P}_x^{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{M}_{\vec{x}}^{(x,y)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Vertical ($\vec{y}$))	$\mathbf{P}_y^{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{M}_{\vec{y}}^{(x,y)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polariseur circulaire		
Circulaire gauche	$\mathbf{P}_{CG} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{M}_{CG} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Circulaire droit	$\mathbf{P}_{CD} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{M}_{CD} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polariseur général (angle ψ avec l'axe x : base (u,v))	$\mathbf{P}_{\psi,x}^{(u,v)} = \mathbf{R}_\psi^{-1}\mathbf{P}_x^{(x,y)}\mathbf{R}_\psi$ $= \begin{pmatrix} \cos^2\psi & \sin\psi\cos\psi \\ \sin\psi\cos\psi & \sin^2\psi \end{pmatrix}$	
Lame retardatrice de phase δ	$\mathbf{L}_{\delta,x} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}$	$\mathbf{L}_{1/4,x}^{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C & CS & -S \\ 0 & CS & S^2 & C \\ 0 & S & -C & 0 \end{pmatrix}$
(ν est l'angle de l'axe rapide $/x$) (lame demi-onde : $\delta = \pi$) (lame quart-onde : $\delta = \pi/2$)	$\mathbf{L}_{\delta,y} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}$	$C = \cos 2\nu$ et $S = \sin 2\nu$